

ランダムウォークの被覆時間および局所時間の最大値



阿部 圭宏 Abe Yoshihiro

大学院理学研究院数学・情報数理学研究部門講師

専門分野：確率論

2016年に京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系博士後期課程修了。

神戸大学大学院理学研究科日本学術振興会特別研究員（PD）、学習院大学理学部数学科助教を経て現職に至る。

— どのような研究内容か？

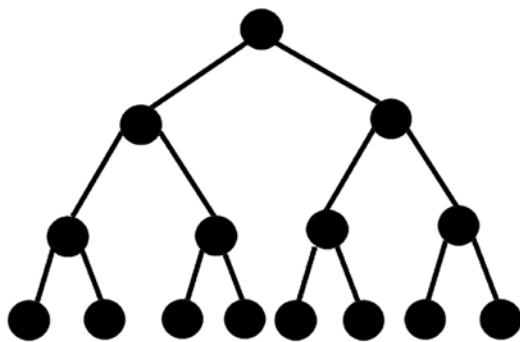
パソコンの画面上を一匹のアリが歩き回ることを想像してください。問1．アリが画面のすみずみまで歩き尽くすのにどのくらいの時間を要するでしょうか？ 問2．アリが十分な長い時間歩き回ったとき、アリが最も頻繁に訪問する場所があります。その場所への訪問回数はいくらでしょうか？ 確率論ではこれらの問題を考えるとき、一つの方法としてパソコンの画面をグラフに、アリのランダムウォーク（以下、RWと略します）という確率モデルに置き換えます。このように定式化すると、問1はRWの被覆時間（RWがグラフのすべての点を訪問し尽くすのに要する時間）を、問2はRWの局所時間（各点における滞在時間）の最大値を評価することに対応します。これらが私の研究対象です。以下では、被覆時間の研究についてもう少し詳細を述べます。

私はパーコレーションというグラフ上のRWの被覆時間を評価しました。パーコレーションとは格子の所々が破損している迷路のようなグラフです。多くの先行研究では、破損の

程度が軽いパーコレーション上のRWは無傷の格子上のRWと同様のふるまいをすることが報告されていました。私は3次元以上で両者の被覆時間に大きな違いがあることを明らかにしました。

— 何の役に立つ研究なのか？

局所時間の最大値の研究は、ある予想の解決に向けた一助になると期待されます。ある予想とは次のようなものです：データ（確率変数）が互いに無関係（独立）な場合、その最大値の性質は調べつくされています。そこでデータ間の相関を強くしていったときどのようなことが起こるかに興味があります。相関が強すぎず弱すぎずのものとして対数相関があります。特別なグラフ（2分木、2次元格子など）上のRWの局所時間は、対数相関を持つデータのクラスに分類されます。このクラスのデータの最大値は独立なデータの最大値とは異なる特有な性質を持つと予想されています。この予想はまだ一部のデータに対してのみでしか解決されていません。私は2分木上のRWの局所時間に対してこの予想を解決しました。



深さ3の2分木

figure 1: binary_tree



すべての辺に対して、確率 p で残し、確率 $1-p$ で切り取る操作を各辺独立に行うことによってパーコレーションが得られる。

figure 2: percolation

—— 今後の計画は？

2次元格子上のRWに対して局所時間の最大値、被覆時間を詳しく調べます。2次元格子は数あるグラフの中でもこれらの量を解析するのが最も困難なグラフであると考えられています。実際、20年ほど前に提起された予想は未解決であり、現在までにわかっていることも理想形からは程遠いのが現状です。一方でその予想の解決に向けた解析技術は近年、急速に発展しており、その距離は縮まりつつあります。私も理想形に少しでも近づくことを目指して研究に取り組みます。

—— 関連ウェブサイトへのリンク URL

千葉大学理学部数学・情報数理学科

▶ <http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/>

—— 成果を客観的に示す論文や新聞等での掲載の紹介

- [1] Y. Abe. Effective resistances for supercritical percolation clusters in boxes. *Annales de l'Institut Henri Poincaré-Probabilités et Statistiques*. Vol. 51, No. 3 (2015), 935-946.
- [2] Y. Abe. Extremes of local times for simple random walks on symmetric trees. *Electron. J. Probab.* 23 (2018), paper no. 40, 41pp.

—— この研究の「強み」は？

パーコレーションや2分木上の単純ランダムウォークのふるまいについて多くのことがわかっているがゆえにすべてを知った気になりがちです。しかし、より精密に調べると面白い現象を見出すことができることを明らかにした点が本研究の「強み」といえると思います。

—— 研究への意気込みは？

単純な確率モデルであっても私たちがまだ理解できていない性質は多く残されています。それらを調べるには技術的な困難に度々ぶつかりますが、「知りたい」という気持ちを燃料にして未知を既知に変える研究を推し進めていきたいです。

—— 学生や若手研究者へのメッセージ

先生方からいただいたアドバイスの受け売りで恐縮ですが、勉強でも研究でも「手を動かすこと」および「根気」が大事だと思います。スポーツや音楽と同じように何度も何度も実践して習得したい内容を体に馴染ませることが欠かせないと思います。「どうしてもそれを理解したいんだ」という強い気持ちで、そのような泥臭いことをひたすら続ける原動力となります。